Funkcje wielu zmiennych - zadania

1. Znaleźć i narysować dziedziny funkcji:

a) $z(x,y)=\sqrt{2x-y+3}$, b) $z(x,y)=\dfrac{y^2-1}{\sqrt{1-x}}+\ln(x-y)$,

c) $z(x,y)=\dfrac{2\sqrt{y}}{x+3}+\sqrt[4]{2x-y-x^2}$, d) $z(x,y)=\ln(9-x^2-y^2)+\sqrt{1-x}$,

e) $z(x,y)=2\ln(4x-x^2-3)+\arcsin(y+3)$, f) $u(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$.

2. Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu I. Dla przykładu d, e oraz k zapisać różniczki zupełne:

a) $z=2x^3-y^4+12x^2y-4x+3$, b) $z=3x^2y^2-\sqrt{x}+7xy-x\ln y$, c) $z=3x-2x^3y+3\sqrt{xy}$

d) $z=\dfrac{x-2y}{3x+y}$, e) $z=y\,e^{3x-2y}$, f) $z=x^2\cos(5xy-4)$, g) $z=\sin x^y$,

h) $z=2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, i) $z=\ln\cos(x^2-y^2)$, j) $z=\operatorname{tg}^2(x^3+2xy)$,

k) $u=\ln(x+y^2+z^3)$, l) $u=x^2e^{yz}$, m) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3. Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu II.

a) $z=6x-5xy^3+x^2$, b) $z=\dfrac{x^2}{1-2y}$, c) $z=\ln(y^2-x^2)$, d) $z=y\sin(5x^2-2y)$.

4. Sprawdzić, czy dana funkcja spełnia podane równanie:

a) $z=\ln(x^2+y^2)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (równanie Laplace'a),

b) $z=x\ln\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}y=z$,

c) $z=\ln\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x^2}$.

5. Obliczyć gradient funkcji:

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ w punkcie $P_0(3,4)$, b) $f(x,y,z)=xy^2z^3$ w punkcie $P_0(1,-1,2)$.

6. Znaleźć pochodną kierunkową funkcji:

a) $f(x,y)=x^2+yx$ w punkcie $P_o(3,5)$, w kierunku wektora $\vec{w}=[4,-3]$,

b) $f(x,y)=\operatorname{arctg}xy$ w punkcie $P_o(1,1)$, w kierunku wektora $\vec{w}=[\sqrt{5},2]$,

c) $u(x,y,z)=xy^2+z^3-xyz$ w punkcie $A(2,1,-1)$, w kierunku gradientu w tym punkcie.

7. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

a) $z=4x-4y-x^2-y^2$, b) $z=x^2-xy+y^2-2x+y$, c) $z=x^3+8y^3-6xy+5$,

d) $z=x^3+xy^2+6xy$, e) $z=x^3+y^2-6xy-48x$, f) $z=e^{-x}(x+y^2)$.

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych

1. $(c)' = 0$, (c – dowolna stała),
2. $\left(x^a\right)' = a\,x^{a-1}$, ($a$ – dowolna stała),
   - $(x)' = 1$,
   - $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,
   - $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$,
3. $\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$,
4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$,
5. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$,
6. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
7. $\left(\sin x\right)' = \cos x$,
8. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$,
9. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
10. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
11. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
12. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
13. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,
14. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Całki nieoznaczone - zadania

1. Znaleźć całki:

a) $\int\left(5x^2-6x+3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)dx$, b) $\int\frac{(x^2-1)^2}{x}dx$, c) $\int\left(\frac{2}{x}-3x^2\sqrt{x}+\frac{5x}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$,

d) $\int\frac{x\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{x^2}dx$, e) $\int(3+2\sqrt[4]{x})^3dx$, f) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$,

g) $\int\left(\frac{-9}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sin^2 x}+4\cos x+\frac{5}{1+x^2}\right)dx$.

2. Znaleźć całki:

a) $\int\cos 3x dx$, b) $\int e^{4x-2}dx$, c) $\int\sin(2x-7)dx$, d) $\int\sqrt{3x-5}\,dx$, e) $\int\frac{1}{\sqrt[3]{6x+5}}dx$,

f) $\int\sin^2 x\cos x\,dx$, g) $\int \mathrm{tg}x\,dx$, h) $\int\frac{x}{x^2-4}dx$, i) $\int\frac{x}{(x^2-3)^6}dx$, j) $\int\frac{x}{\sqrt{3-5x^2}}dx$,

k) $\int x(x^2-7)^5dx$, l) $\int x\sin(2x^2+1)dx$, ł) $\int\frac{e^x}{2e^x+1}dx$, m) $\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx$,

n) $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx$, o) $\int\frac{dx}{(1+x^2)\mathrm{arctg}x}$, p) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{5+3\sin x}}$, r) $\int\cos x\,e^{\sin x}\,dx$.

3. Znaleźć całki:

a) $\int x\cos x dx$, b) $\int xe^x dx$, c) $\int x^2\sin 2x dx$, d) $\int x\cos(3-2x)\,dx$, e) $\int x\,e^{5x-1}dx$,

f) $\int x^3e^{-x}dx$, g) $\int x^2\ln x dx$, h) $\int\frac{\ln x}{x^4}dx$, i) $\int\sqrt[3]{x}\,\ln x dx$, j) $\int x\,\ln^2 x dx$, k) $\int\ln x\,dx$,

l) $\int x\,\mathrm{arctg}x\,dx$, m) $\int\mathrm{arctg}x\,dx$, n) $\int\arcsin x\,dx$, o) $\int e^x\cos x dx$, p) $\int e^{-2x}\sin 3x\,dx$.

4. Obliczyć całki:

a) $\int\frac{x-10}{x^2-5x+4}dx$, b) $\int\frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx$, c) $\int\frac{2x+6}{2x^2+3x+1}dx$, d) $\int\frac{dx}{x^2+2x+1}$,

e) $\int\frac{2x-1}{x^2-6x+9}dx$, f) $\int\frac{dx}{x^2-6x+13}$, g) $\int\frac{2x-1}{x^2-2x+5}dx$, h) $\int\frac{3x+4}{x^2+4x+8}dx$,

i) $\int\frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5}dx$, j) $\int\frac{2x^2+7x+20}{x^2+6x+25}dx$, k) $\int\frac{x^3}{x^2-2x+10}dx$,

l) $\int\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}dx$, m) $\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$, n) $\int\frac{x-1}{x^3+2x^2+x+2}dx$,

o) $\int\frac{-5x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$, p) $\int\frac{x^2-2}{(x-1)^3}dx$, r) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

5. Obliczyć całki:

a) $\int \sin^2 x dx$, b) $\int \cos^2 x dx$, c) $\int \sin^3 x dx$, d) $\int \cos^5 x dx$,

e) $\int \sin^4 x dx$, f) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$, g) $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$, h) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$,

i) $\int \frac{dx}{\sin x}$, j) $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$, k) $\int \frac{dx}{3+2\sin x}$, l) $\int \frac{dx}{(3+\sin x)\cos x}$.

Wzory podstawowe

1. $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$, $a \neq -1$,
2. $\int dx = x + C$,
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$,
4. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$,
5. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$,
6. $\int e^x \, dx = e^x + C$,
7. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$,
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$,
11. $\int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}} + C$, dla $a > 0$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$,
13. $\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$,
14. $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$.

Całkowanie przez części

$$\boxed{\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx}$$