

## Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej - zadania

1. Obliczyć pochodne funkcji

a)  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x - 7$ , b)  $y = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}$ , c)  $y = 3\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[4]{x}$ ,

d)  $y = \frac{2\sqrt{x} - x^2\sqrt[3]{x}}{x^3}$ , e)  $y = (2\cos x - 5x^2)(1 - \ln x)$ , f)  $y = e^x \operatorname{ctgx}$ , g)  $y = \frac{x^2}{x-1}$ ,

h)  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$ , i)  $y = \frac{x - \cos x}{1 - \sin x}$ , j)  $y = (7x - 2)^3$ , k)  $y = \sqrt{5x^2 - 2}$ , l)  $y = \frac{3}{\sqrt[3]{2-5x}}$ ,

ł)  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ , m)  $y = \cos^2(3x-1)$ , n)  $y = 3\ln\frac{5}{x-2}$ , o)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,

p)  $y = 4\operatorname{tg}\sqrt{x-2}$ , r)  $y = 7e^{-x^2}$ , s)  $y = e^{\cos x}$ , t)  $y = (10x^2 - 1)e^{3x}$ , u)  $y = \operatorname{arctg}x^2$ ,

y)  $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ , v)  $y = 3\arccos\frac{1}{2}x$ , w)  $y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

2. Obliczyć pochodne drugiego rzędu funkcji:

a)  $y = \sin^2 x$ , b)  $y = xe^{-x^2}$ , c)  $y = \ln(x^2 - 3x)$ , d)  $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ .

3. Napisać równanie stycznej do krzywej  $y = f(x)$  w punkcie  $x_0$ :

a)  $y = 2x^2 - 8$ ,  $x_0 = 1$ , b)  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ ,  $x_0 = 0$ , c)  $y = \ln x$ ,  $x_0 = e$ ,

d)  $y = \operatorname{arctg}x$ ,  $x_0 = 1$ .

4. Obliczyć granice:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2 + 5}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg}x}$ , d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\operatorname{arctg}x - \pi}$ , e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$ ,

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) \operatorname{ctgx}$ , g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x(\operatorname{arctg}x - \pi)]$ , i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x$ , j)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ ,

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \operatorname{ctgx} \right)$ , l)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ , m)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2}$ , n)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{ctgx})^{\frac{x - \frac{\pi}{4}}{4}}$ , o)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\sin x}$ .

5. Znaleźć asymptoty wykresów funkcji określonych wzorami:

a)  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ , a)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 4}$ , b)  $f(x) = e^{x^2}$ , c)  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ ,

d)  $f(x) = x \ln \left( e + \frac{1}{x} \right)$ , e)  $f(x) = x^2 \ln x$ , f)  $f(x) = x - 2\operatorname{arctg}x$ , g)  $f(x) = 2x + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ .

6. Wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji:

- a)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ , b)  $f(x) = \frac{1-x^2}{2x}$ , c)  $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ , d)  $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ ,  
e)  $f(x) = \frac{x^4}{e^x}$ , f)  $f(x) = x^2 - 4 \ln(x-1)$ , g)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , h)  $f(x) = x^2 \ln x$ ,  
i)  $y = 2x - 3 \sqrt[3]{x^2}$ , j)  $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$ .

7. Znaleźć najmniejsze i największe wartości funkcji określonych wzorami:

- a)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$  na przedziale  $\langle -2, 2 \rangle$ , b)  $f(x) = x - 2 \ln x$  na przedziale  $\langle 1, e \rangle$ .  
c)  $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$  na przedziale  $\langle -6, 8 \rangle$ , d)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$  na przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$ .

8. Znaleźć przedziały wklęsłości i wypukłości oraz punkty przegięcia wykresów funkcji określonych wzorami:

- a)  $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$ , b)  $f(x) = x^2 - \frac{8}{x}$ , c)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ , d)  $f(x) = x e^{-2x}$ ,  
e)  $f(x) = e^{-x^2}$ , f)  $f(x) = \frac{1}{2} x^2 - 3x + \ln(x+1)$ , g)  $f(x) = x^2 \ln x$ , h)  $f(x) = \ln(1+x^2)$ .

9. Zbadać funkcje określone wzorami:

- a)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ , b)  $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ , c)  $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$ , d)  $f(x) = \frac{x}{e^x}$ ,  
e)  $f(x) = x - \ln(x+1)$ , f)  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ , g)  $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ , h)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ .

## Tablica pochodnych

1)  $(C)' = 0$ ,  $C = \text{const}$ ,

2)  $(x^a)' = a x^{a-1}$ ,

•  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ,

•  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,

•  $(x)' = 1$ ,

3)  $(e^x)' = e^x$ ,

4)  $(a^x)' = a^x \ln a$ ,

5)  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ,

6)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ,

7)  $(\sin x)' = \cos x$ ,

8)  $(\cos x)' = -\sin x$ ,

9)  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,

10)  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ,

11)  $(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,

12)  $(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,

13)  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ,

14)  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ .