ZMIENNE LOSOWE

Pojęcie zmiennej losowej

Niech $\{\Omega, S, P\}$ będzie przestrzenią probabilistyczną związaną z pewnym doświadczeniem.

Definicja. *Zmienną losową* nazywamy funkcję określoną na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i przyjmującą wartości rzeczywiste:

$$X : \Omega \to R$$

taką, że

$$\bigwedge_{x \in R} \{\omega : X(\omega) < x\} \in S,$$

czyli dla każdej liczby rzeczywistej x zbiór zdarzeń elementarnych ω, dla których spełniona jest nierówność $X(\omega) < x$ jest zdarzeniem.

Uwaga. Dla dyskretnej przestrzeni zdarzeń elementarnych każda funkcja $X : \Omega \to R$ jest zmienną losową.

Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową wartości z danego zbioru.

Prawdopodobieństwo $P(X \in A)$ przyjęcia przez zmienną losową X wartości ze zbioru A, gdzie $A \subset R$, określamy następująco:

$$P(X \in A) = P(\{\omega : X(\omega) \in A\}) ,$$

czyli jest to prawdopodobieństwo zdarzenia składającego się z tych zdarzeń elementarnych ω, dla których wartości $X(\omega)$ wpadają do zbioru A.

Przykład. Rzut kostką do gry

Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \omega_4 , \omega_5 , \omega_6\} ,$$

gdzie ω_i oznacza wyrzucenie i-tej liczby oczek.

Przykłady zmiennych losowych:

- ***X*** – przyporządkowanie zdarzeniu elementarnemu ω_i liczby wyrzuconych oczek:

$$X(\omega_i) = i, \quad \text{dla } i = 1, 2, ..., 6 .$$

- ***Y*** – zmienna określona następująco:

$$Y(\omega_1) = Y(\omega_2) = 1, \quad Y(\omega_3) = Y(\omega_4) = Y(\omega_5) = Y(\omega_6) = -1 .$$

$P(X = 5) = P(\{\omega_5\}) = \frac{1}{6}$

$P(2 \le X < 5) =$

$P(X > 3) =$

$P(Y = 1) =$

$P(Y < 2) =$

Dystrybuanta zmiennej losowej

Definicja. *Dystrybuantą* zmiennej losowej X nazywamy funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej, określoną wzorem

$$F(x) = P(X < x) = P(\{\omega : X(\omega) < x\}) .$$

Twierdzenie. Funkcja $F(x)$ jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy, gdy

1° $F(x)$ jest niemalejąca,

2° $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$,

3° $F(x)$ jest lewostronnie ciągła, tzn. $F(x_o^-) = F(x_o)$, gdzie $F(x_o^-) = \lim_{x \to x_o^-} F(x)$.

Uwaga. Przy pomocy dystrybuanty można określić prawdopodobieństwa przyjmowania przez zmienną losową wartości z określonych przedziałów, np.:

1) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$,

2) $P(X = x_o) = F(x_o^+) - F(x_o)$,

3) $P(X \le x_o) = F(x_o^+)$,

4) $P(X > x_o) = 1 - F(x_o^+)$.

Zmienne losowe typu skokowego (dyskretnego)

Mówimy, że zmienna losowa X jest typu *skokowego* (*dyskretnego*), jeżeli istnieje skończony albo przeliczalny zbiór $W=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ jej wartości taki, że:

1° $P(X=x_i)=p_i>0$, $x_i\in W$,

2° $\sum_i p_i=1$.

Równość z warunku 2° nosi nazwę *warunku unormowania*, liczby $x_i\in W$ nazywa się *punktami skokowymi* zmiennej X, zaś prawdopodobieństwa p_i – *skokami* tej zmiennej.

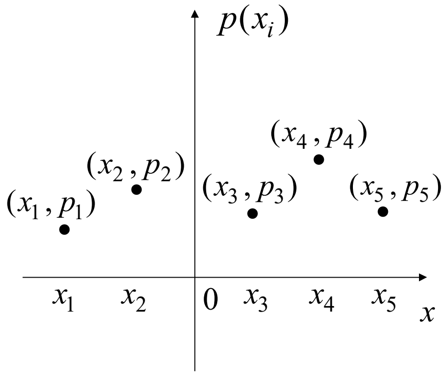
Funkcję p określoną na zbiorze W równością

$$p(x_i)=P(X=x_i)\equiv p_i\ , \quad x_i\in W$$

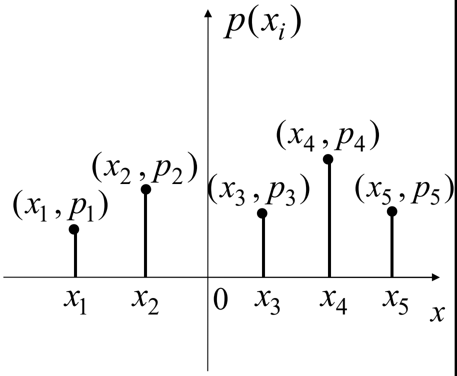
albo tablicą

x_i	x_1	x_2	...	x_n	...
p_i	p_1	p_2	...	p_n	...

i spełniającą warunek unormowania nazywamy *funkcją rozkładu prawdopodobieństwa* (krótko: *rozkładem prawdopodobieństwa, funkcją prawdopodobieństwa*) zmiennej losowej X.



Wykres funkcji rozkładu prawdopodobieństwa



Histogram funkcji rozkładu prawdopodobieństwa

Dystrybuanta zmiennej losowej skokowej

Gdy dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej skokowej X, to prawdopodobieństwo przyjęcia przez tą zmienną wartości ze zbioru A jest określone równością:

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p_i \ .$$

Dla zmiennej losowej skokowej dystrybuanta wyraża się wzorem:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i \ .$$

Przykład S1. Rzut kostką do gry

Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$

gdzie ω_i oznacza wyrzucenie *i*-tej liczby oczek.

Zmienną losową X określmy w sposób następujący:

$$X(\omega_1) = X(\omega_3) = -1, \qquad X(\omega_2) = 0,$$

$$X(\omega_4) = X(\omega_5) = X(\omega_6) = 2.$$

Dla tak określonej zmiennej losowej X wyznaczyć:

1) funkcję prawdopodobieństwa oraz jej histogram,
2) dystrybuantę i jej wykres
3) $P(X < 1{,}5)$, $P(0 \le X < 3)$, $P(X = 2)$, $P(X = -0{,}5)$, wykorzystując:
   a) funkcję prawdopodobieństwa, b) dystrybuantę.

Zmienne losowe typu ciągłego

Zmienną losową typu ciągłego nazywamy taką zmienną losową X, dla której istnieje nieujemna funkcja f taka, że dystrybuantę F tej zmiennej można przedstawić w postaci:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad \text{dla } x \in R.$$

Funkcję f nazywamy *gęstością* (rozkładu) *prawdopodobieństwa* zmiennej losowej X, a jej wykres – *krzywą gęstości*.

Mówimy, że dany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X typu ciągłego, jeżeli dana jest dystrybuanta F lub gęstość f.

Własności zmiennej losowej ciągłej

Jeżeli gęstość f jest funkcją ciągłą w punkcie x, to:

1° $F'(x) = f(x)$,

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, – jest to warunek na to aby nieujemna funkcja f była gęstością pewnego rozkładu

3° $\bigwedge_{x_o \in R} P(X = x_o) = 0$,

4° $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Przykład C1. Wyznaczyć stałą c, tak aby funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} cx - x^2, & \text{dla } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{dla pozostalych } x \end{cases}$$

była gęstością rozkładu pewnej zmiennej losowej X typu ciągłego, a następnie:

1) znaleźć dystrybuantę tej zmiennej losowej,

2) obliczyć $P(-1 \le X \le 0,5)$.

Ważniejsze charakterystyki liczbowe zmiennych losowych

Definicja. *Wartością oczekiwaną* (*przeciętną, średnią*) zmiennej losowej X nazywamy:

$$EX = \begin{cases} \sum_i x_i p_i & \text{– dla zmiennej skokowej} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & \text{– dla zmiennej ciągłej} \end{cases}$$

Wartość oczekiwana jest najbardziej prawdopodobną wartością danej zmiennej losowej.

Definicja. *Wariancją* zmiennej losowej X nazywamy:

$$D^2 X = \begin{cases} \sum_i (x_i - EX)^2 p_i & \text{– dla zmiennej skokowej} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x) dx & \text{– dla zmiennej ciągłej} \end{cases}$$

Definicja. *Odchyleniem standardowym* zmiennej losowej X nazywamy

$$\sigma = \sqrt{D^2 X}\ .$$

Wariancja oraz odchylenie standardowe są miarami rozrzutu wartości danej zmiennej losowej od wartości oczekiwanej.

Własności wartości oczekiwanej i wariancji

Dla dowolnych zmiennych losowych X i Y mamy:

1° $E(a) = a$, $a = \text{const}$,

2° $E(aX) = a\,E(X)$,

3° $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$,

4° $D^2(a) = 0$, $a = \text{const}$,

5° $D^2(a\,X) = a^2\,D^2(X)$,

6° $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$, gdy zmienne X i Y są niezależne,

7° $D^2\,X = E(X^2) - (EX)^2$. wzór ten jest często wykorzystywany do obliczania wartości wariancji

Definicja. *Medianą* zmiennej losowej X nazywamy taką liczbę x_{me}, że spełnione są warunki:

$$P(X \le x_{me}) \ge \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad P(X \ge x_{me}) \ge \frac{1}{2}\,.$$

Uwaga. Dla ciągłej zmiennej losowej o dystrybuancie F, mamy

$$F(x_{me}) = \frac{1}{2}.$$

Definicja. *Modą* (dominantą) zmiennej losowej X nazywamy:

a) w przypadku zmiennej losowej skokowej – wartość, której odpowiada największe prawdopodobieństwo,

b) w przypadku zmiennej losowej ciągłej – wartość, dla której gęstość przyjmuje maksimum lokalne.