WERYFIKACJA HIPOTEZ

Pojęcia wstępne

Hipotezą statystyczną nazywamy dowolne przypuszczenie o rozkładzie danej cechy w populacji.

Przykładami hipotez statystycznych są stwierdzenia:
1) średniomiesięczny przebieg prywatnych samochodów w pewnej miejscowości ma rozkład normalny N(240, 40) (w km.)
2) średni wzrost Polaków jest taki sam jak średni wzrost Rosjan.

Postępowanie oparte na informacji zawartej w próbce pozwalające zaakceptować lub odrzucić postawioną hipotezę nazywamy *weryfikacją hipotez statystycznych*.

Testem statystycznym nazywamy zmienną losową, która służy do weryfikowania hipotezy statystycznej.

Hipotezę określającą nieznane parametry rozkładu danej cechy populacji nazywamy *hipotezą parametryczną*, a test służący do jej weryfikacji – *testem parametrycznym*.

Główną hipotezę, którą chcemy zweryfikować nazywamy *hipotezą zerową* i oznaczamy H_0 , natomiast hipotezę przeciwną do hipotezy zerowej nazywamy *hipotezą alternatywną* i oznaczamy H_1.

W wyniku weryfikacji hipotezy statystycznej możemy popełnić błędy dwojakiego rodzaju:

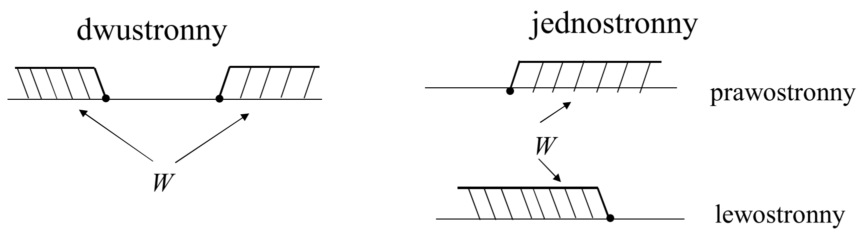
- błąd pierwszego (I) rodzaju – odrzucenie hipotezy zerowej, gdy jest ona prawdziwa,
- błąd drugiego (II) rodzaju – przyjęcie hipotezy zerowej, gdy jest ona fałszywa.

Test służący do zweryfikowania hipotezy zerowej polegający wyłącznie na jej odrzuceniu lub stwierdzeniu braku podstaw do jej odrzucenia nazywamy *testem istotności*. Uwzględnia on w sposób bezpośredni jedynie prawdopodobieństwo błędu I rodzaju.

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju oznaczamy przez α i nazywamy *poziomem istotności*.

Jeżeli wybrany został określony test (w rozumieniu zmiennej losowej), to w zbiorze wszystkich możliwych wartości tego testu można wyróżnić tzw. *obszar krytyczny testu* (będziemy go oznaczać przez W) zawierający te wartości, dla których hipoteza zerowa jest odrzucana. Jeżeli natomiast zaobserwowana wartość testu znajdzie się poza obszarem krytycznym, oznacza to, że brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

W zależności od postaci hipotezy obszar krytyczny może być:



Schemat weryfikacji hipotez:

1) formułujemy hipotezę zerową oraz alternatywną,

2) wybieramy odpowiedni test (statystykę),

3) obliczamy wartość zaobserwowaną testu na podstawie próbki,

4) ustalamy poziom istotności (zwykle $\alpha = 0{,}05$ lub $\alpha = 0{,}01$),

5) wyznaczamy obszar krytyczny W,

6) sprawdzamy, czy wartość zaobserwowana testu należy do obszaru krytycznego, jeżeli tak, to hipotezę H_0 odrzucamy, jeżeli nie, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej H_0 (ani przyjęcia hipotezy alternatywnej).

Parametryczne testy istotności

Testy dla wartości średniej

Model I. Założenia:

1) cecha X elementów populacji generalnej ma rozkład normalny $N(\mu,\sigma)$,
2) odchylenie standardowe σ jest znane przed pobraniem próbki,
3) n-liczność próbki dowolna.

Weryfikujemy hipotezę:

H_o : $\mu = \mu_o$

H_1 : $a)$ $\mu \neq \mu_o$

$b)$ $\mu > \mu_o$

$c)$ $\mu < \mu_o$

Do weryfikacji hipotezy H_o stosujemy statystykę (test):

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_o}{\sigma}\sqrt{n}$$

Obliczamy realizację tej statystyki dla aktualnie zaobserwowanej próbki:

$$u_p = \frac{\overline{x} - \mu_o}{\sigma}\sqrt{n}$$

Wyznaczamy obszar krytyczny dla zadanego poziomu istotności:

a) $W = (-\infty, \; -u_{1-\frac{1}{2}\alpha} \rangle \cup \langle u_{1-\frac{1}{2}\alpha} \, , +\infty)$,

b) $W = \langle u_{1-\alpha} \, , +\infty)$,

c) $W = (-\infty, \; -u_{1-\alpha} \rangle$, gdzie:

α – poziom istotności

$u_{1-\frac{1}{2}\alpha}$, $u_{1-\alpha}$ – kwantyle odpowiednio rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ oraz $1-\alpha$ zmiennej losowej U o rozkładzie $N(0,1)$

Jeżeli $u_p \in W$, to (na poziomie istotności α) hipotezę H_o odrzucamy i przyjmujemy alternatywną.

Jeżeli $u_p \notin W$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_o (co nie oznacza, że jest ona prawdziwa).

Model II. Założenia:

1) cecha X elementów populacji generalnej ma rozkład normalny $N(\mu,\sigma)$,

2) odchylenie standardowe σ nie jest znane,

3) n-liczność próbki dowolna.

Weryfikujemy hipotezę:

$H_o: \quad \mu = \mu_o$

$H_1:$ $a)$ $\mu \neq \mu_o$

$b)$ $\mu > \mu_o$

$c)$ $\mu < \mu_o$

Do weryfikacji hipotezy H_o stosujemy statystykę (test):

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_o}{S}\sqrt{n-1}$$

Obliczamy realizację tej statystyki dla aktualnie zaobserwowanej próbki:

$$t_p = \frac{\overline{x} - \mu_o}{s}\sqrt{n-1}$$

Wyznaczamy obszar krytyczny dla zadanego poziomu istotności:

a) $W = (-\infty,\ -t_{n-1,\,1-\frac{1}{2}\alpha}\rangle \cup \langle t_{n-1,\,1-\frac{1}{2}\alpha},\ +\infty)$,

b) $W = \langle t_{n-1,\,1-\alpha},\ +\infty)$,

c) $W = (-\infty,\ -t_{n-1,\,1-\alpha}\rangle$,

gdzie:

α – poziom istotności,

$t_{n-1,1-\frac{1}{2}\alpha}$, $t_{n-1,1-\alpha}$ – kwantyle odpowiednio rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ oraz $1-\alpha$ zmiennej losowej T o rozkładzie T-studenta z n-1 stopniami swobody.

Jeżeli $t_p \in W$, to (na poziomie istotności α) hipotezę H_o odrzucamy i przyjmujemy alternatywną.

Jeżeli $t_p \notin W$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_o (co nie oznacza, że jest ona prawdziwa).

Model III. Założenia:

1) cecha X elementów populacji generalnej ma dowolny rozkład,
2) odchylenie standardowe σ cechy X nie jest znane,
3) n-liczność próbki duża $(n \geq 30)$.

W tym przypadku postępujemy tak jak w modelu I, przy czym w miejsce nieznanego odchylenia standardowego σ podstawiamy S lub (co bardziej właściwe) $\widetilde{S}$.

Przykład. W wyniku pracy paczkowarki otrzymujemy paczki, których średnia masa powinna wynosić 500g. Co 8 godzin pracownik kontroli jakości podejmuje decyzję, czy paczkowarka wymaga regulacji. Stawiając się w roli pracownika kontroli zdecydujmy, czy potrzebna jest regulacja w przypadku zaobserwowania następującej próbki (gramach):

508, 503, 497, 506, 509, 507, 495, 504, 496, 505.

Jako poziom istotności przyjmujemy $\alpha = 0{,}05$ i zakładamy, że rozkład masy produkowanych paczek jest normalny.

Testy dla dwóch średnich

Testy te sprawdzają hipotezę o równości średnich (wartości oczekiwanych) w dwóch populacjach.

Model I. Założenia:

1) badana cecha X w obu populacjach ma rozkład normalny $N(\mu_1, \sigma_1)$ i $N(\mu_2, \sigma_2)$,
2) odchylenia standardowe są znane,
3) liczności próbek n_1 i n_2 dowolne.

Weryfikujemy hipotezę:

$H_o: \quad \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \; a) \; \mu_1 \neq \mu_2$

$\quad\;\; b) \; \mu_1 > \mu_2$

$\quad\;\; c) \; \mu_1 < \mu_2$

Do weryfikacji hipotezy H_o stosujemy statystykę (test):

$$U = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Po obliczeniu realizacji u_p tej statystyki dla aktualnie zaobserwowanej próbki wyznaczamy obszar krytyczny dla zadanego poziomu istotności:

a) $W = \left(-\infty, \; -u_{1-\frac{1}{2}\alpha}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\frac{1}{2}\alpha}, \; +\infty\right)$,

b) $W = \left\langle u_{1-\alpha}, \; +\infty\right)$,

c) $W = \left(-\infty, \; -u_{1-\alpha}\right\rangle$, gdzie:

α – poziom istotności

$u_{1-\frac{1}{2}\alpha}$, $u_{1-\alpha}$ – kwantyle odpowiednio rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ oraz $1-\alpha$ zmiennej losowej U o rozkładzie $N(0,1)$

Jeżeli $u_p \in W$, to (na poziomie istotności α) hipotezę H_o odrzucamy i przyjmujemy alternatywną.

Jeżeli $u_p \notin W$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_o (co nie oznacza, że jest ona prawdziwa).

Model II. Założenia:

1) badana cecha X w obu populacjach ma rozkład normalny $N(\mu_1, \sigma_1)$ i $N(\mu_2, \sigma_2)$,
2) odchylenia standardowe są nieznane, ale wiadomo, że są równe: $\sigma_1 = \sigma_2$,
3) liczności próbek n_1 i n_2 dowolne.

Weryfikujemy hipotezę:

$H_o: \quad \mu_1 = \mu_2$

$H_1:$ $a)$ $\mu_1 \neq \mu_2$
$b)$ $\mu_1 > \mu_2$
$c)$ $\mu_1 < \mu_2$

Do weryfikacji hipotezy H_o stosujemy statystykę (test):

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Po obliczeniu realizacji t_p tej statystyki dla aktualnie zaobserwowanej próbki wyznaczamy obszar krytyczny dla zadanego poziomu istotności:

a) $W = \left(-\infty,\ -t_{n_1+n_2-2,\, 1-\frac{1}{2}\alpha}\right\rangle \cup \left\langle t_{n_1+n_2-2,\, 1-\frac{1}{2}\alpha},\ +\infty\right)$,

b) $W = \left\langle t_{n_1+n_2-2,\, 1-\alpha},\ +\infty\right)$,

c) $W = \left(-\infty,\ -t_{n_1+n_2-2,\, 1-\alpha}\right\rangle$,

gdzie:

α – poziom istotności,

$t_{n_1+n_2-2,1-\frac{1}{2}\alpha}$, $t_{n_1+n_2-2,1-\alpha}$ – kwantyle odpowiednio rzędu $1-\frac{1}{2}\alpha$ oraz $1-\alpha$ zmiennej losowej T o rozkładzie T-studenta z n_1+n_2-2 stopniami swobody.

Jeżeli $t_p \in W$, to (na poziomie istotności α) hipotezę H_o odrzucamy i przyjmujemy alternatywną.

Jeżeli $t_p \notin W$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_o (co nie oznacza, że jest ona prawdziwa).

Model III. Założenia:

1) badana cecha w obu populacjach ma dowolne rozkłady,

2) odchylenia standardowe nie są znane,

3) liczności próbek duże $(n_1 \geq 30 \ \text{ i } \ n_2 \geq 30)$.

Weryfikacja hipotezy zerowej przebiega analogicznie, jak w modelu I, przy czym w miejsce nieznanych odchyleń standardowych σ_1 i σ_2 podstawiamy S_1 i S_2 (lub $\tilde{S}_1$ i $\tilde{S}_2$)

Przykład. W celu sprawdzenia hipotezy, że zastosowanie nowego materiału zwiększa żywotność pewnej części trącej maszyny, zbadano na dwóch próbkach żywotność tej części wyprodukowanej ze starego i nowego materiału i otrzymano wyniki:

Żywotność części [w tyg]	Liczba sztuk części	
	(1) – stary materiał	(2) – nowy materiał
4 – 6	5	4
6 – 8	15	10
8 – 10	40	56
10 – 12	20	30
12 – 14	10	20
Suma:	90	120

Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0{,}1$ sprawdzić wysuniętą hipotezę.

Testy dla wariancji

Model I. Założenia:

1) cecha X elementów populacji generalnej ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$,
2) parametry μ oraz σ nie są znane,
3) liczność próbki $n < 30$.

Weryfikujemy hipotezę:

$H_o: \quad \sigma^2 = \sigma_o^2$

$H_1:$ $a)$ $\sigma^2 \neq \sigma_o^2$

$b)$ $\sigma^2 > \sigma_o^2$

$c)$ $\sigma^2 < \sigma_o^2$

Do weryfikacji hipotezy H_o stosujemy statystykę (test):

$$\chi^2 = \frac{n S^2}{\sigma_o^2}$$

Po obliczeniu realizacji χ_p^2 tej statystyki dla aktualnie zaobserwowanej próbki wyznaczamy obszar krytyczny dla zadanego poziomu istotności α:

a) $W = \left(0, \ \chi^2_{n-1, \frac{1}{2}\alpha} \right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{n-1, 1-\frac{1}{2}\alpha}, +\infty\right)$,

b) $W = \left\langle \chi^2_{n-1, 1-\alpha}, +\infty \right)$,

c) $W = \left(0, \ \chi^2_{n-1, \alpha} \right\rangle$,

$\chi^2_{k,r}$ – kwantyl rzędu r zmiennej losowej o rozkładzie chi-kwadrat z k stopniami swobody (jego wartość odczytujemy z tablic).

Model II. Założenia:

1) cecha X elementów populacji generalnej ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$,

2) parametry μ oraz σ nie są znane,

3) n-liczność próbki duża $(n \geq 30)$.

Weryfikujemy hipotezę:

$H_o: \quad \sigma^2 = \sigma_o^2$

$H_1:$ $a)$ $\sigma^2 \neq \sigma_o^2$

$b)$ $\sigma^2 > \sigma_o^2$

$c)$ $\sigma^2 < \sigma_o^2$

Do weryfikacji hipotezy H_o stosujemy statystykę (test):

$$U = \sqrt{\frac{2nS^2}{\sigma_o^2}} - \sqrt{2n-3}$$

Po obliczeniu realizacji u_p tej statystyki dla aktualnie zaobserwowanej próbki wyznaczamy obszar krytyczny dla zadanego poziomu istotności:

a) $W = \left(-\infty, \ -u_{1-\frac{1}{2}\alpha}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\frac{1}{2}\alpha}, +\infty\right)$,

b) $W = \left\langle u_{1-\alpha}, +\infty\right)$,

c) $W = \left(-\infty, \ -u_{1-\alpha}\right\rangle$,

Przykład. W celu oszacowania dokładności pomiarów pewnym przyrządem dokonano 8 pomiarów pewnej wielkości i otrzymano:

18,32 , 18,40 , 17,91 , 18,14 , 18,45 , 17,86 , 18,02 , 17,79

Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ hipotezę, że wariancja wskazań przyrządu wynosi 0,06 wobec hipotezy alternatywnej, że jest różna od 0,06.