WAŻNIEJSZE ROZKŁADY PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Rozkłady zmiennej losowej skokowej

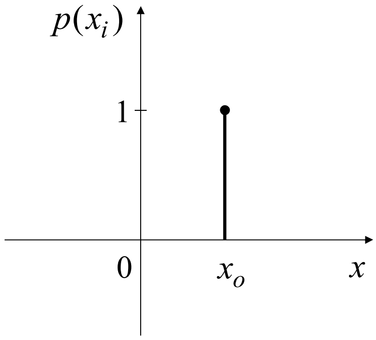
1. Rozkład jednopunktowy

Zmienna losowa X ma *rozkład jednopunktowy*, jeżeli istnieje taki punkt x_o, że:

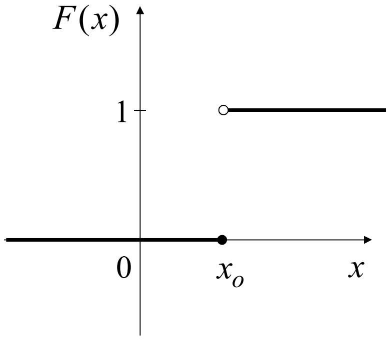
$$P(X = x_o) = 1\,.$$

Dystrybuanta tego rozkładu określona jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le x_o\,, \\ 1 & \text{dla} \quad x > x_o\,. \end{cases}$$



1) Histogram rozkładu



2) Wykres dystrybuanty

Wartość oczekiwana i wariancja tej zmiennej wynoszą:

$$EX = x_o \ , \qquad D^2 X = 0 \ .$$

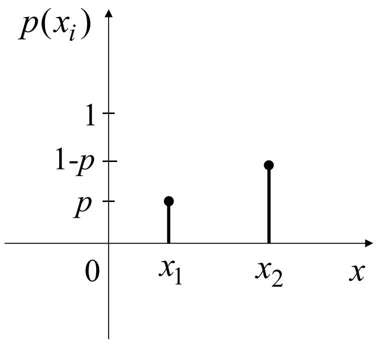
2. Rozkład dwupunktowy

Zmienna losowa X ma *rozkład dwupunktowy*, jeżeli z dodatnim prawdopodobieństwem przyjmuje dwie wartości x_1 i x_2. Funkcja prawdopodobieństwa jest określona następująco:

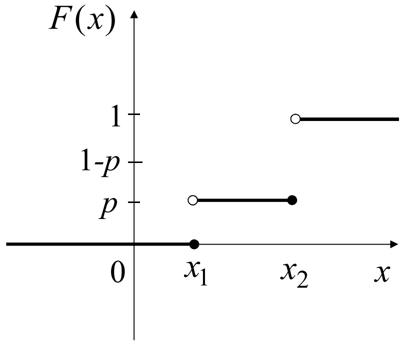
$$P(X = x_1) = p \ , \ P(X = x_2) = 1 - p = q \quad \text{dla} \ \ 0 < p < 1 \ .$$

Dystrybuanta tego rozkładu wyraża się wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le x_1 \, , \\ p & \text{dla} \quad x_1 < x \le x_2 \ , \\ 1 & \text{dla} \quad x > x_2 \, . \end{cases}$$



1) Histogram rozkładu



2) Wykres dystrybuanty

Jeśli w rozkładzie dwupunktowym $x_1 = 1$ i $x_2 = 0$, to taki rozkład nazywamy rozkładem *zero-jedynkowym*.

Dla rozkładu zero-jedynkowego mamy:

$$EX = p \,, \qquad D^2X = pq \,.$$

3. Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)

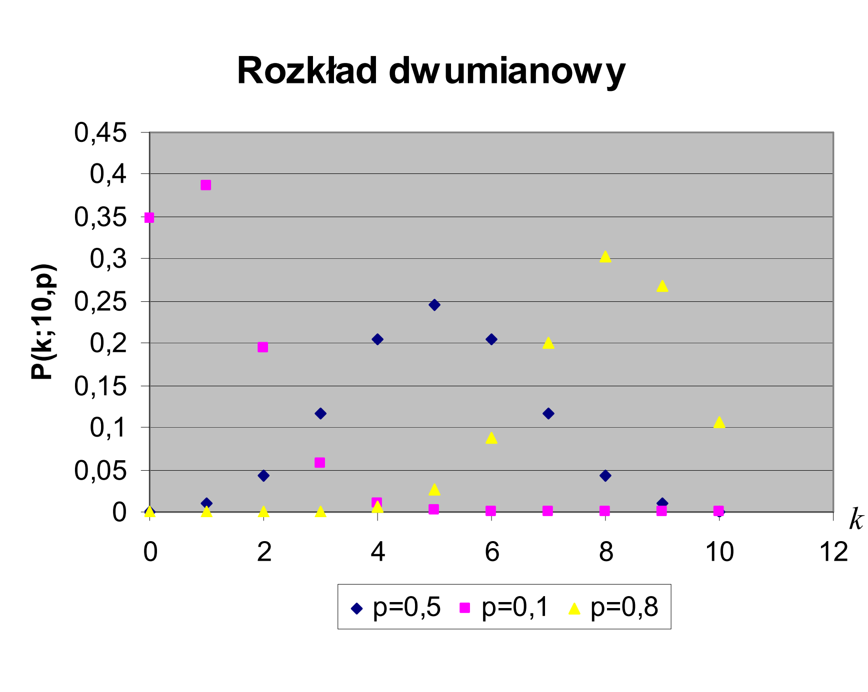
Zmienna losowa X ma *rozkład dwumianowy* z parametrami (n,p), jeżeli jej funkcja prawdopodobieństwa dana jest wzorem:

$$P(X = k) = P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \,,$$

gdzie $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Wartość oczekiwana i wariancja są równe:

$$EX = np \,, \qquad D^2X = npq \,.$$



4. Rozkład Poissona

Niech zmienna losowa X_n ma rozkład dwumianowy określony wzorem:

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\ ,\quad k = 0,1,\ldots,n.$$

Załóżmy, że $n \to +\infty$ i iloczyn np jest stały, tzn. $np = \lambda$, gdzie λ – stała dodatnia. Tak określona zmienna losowa może przyjąć każdą wartość całkowitą z przedziału $\langle 0,+\infty)$. Prawdopodobieństwo przyjęcia przez tą zmienną wartości k wyraża się wzorem:

$$P(X = k) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}\ ,\quad k = 0,\,1,\,2,\,\ldots,\ .$$

Mówimy, że zmienna losowa X ma *rozkład Poissona* z parametrem λ>0, jeżeli jej funkcja prawdopodobieństwa wyraża się wzorem:

$$P(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k=0,1,2,\ldots, .$$

Wartość oczekiwana i wariancja są równe:

$$EX=\lambda, \qquad D^2X=\lambda.$$

Ponieważ rozkład Poissona jest rozkładem granicznym dla rozkładu dwumianowego, można zatem dla **dużych wartości** ***n*** stosować następujące przybliżenia

$$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\approx \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \lambda=np.$$

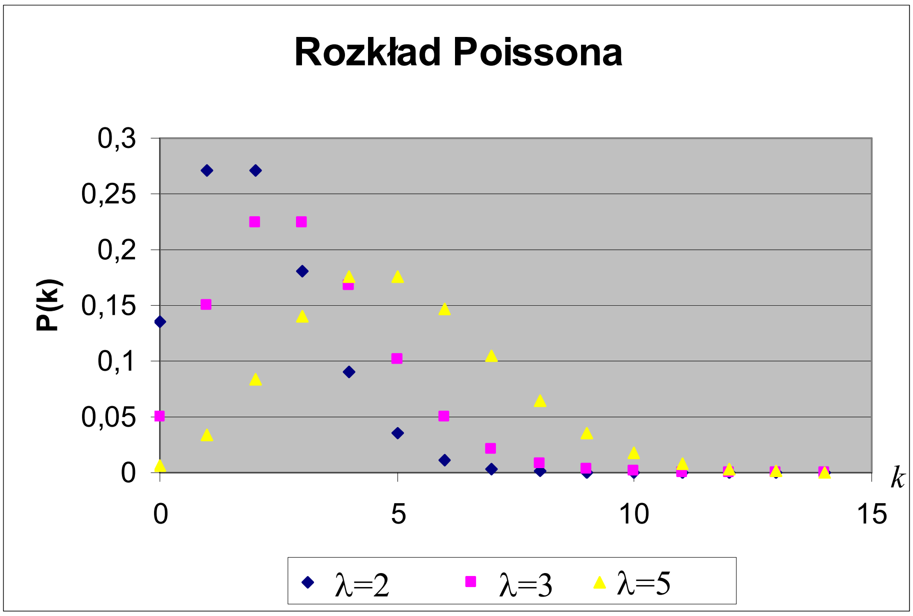
Przykład. W skład złożonej aparatury radiowej wchodzi między innymi n = 1000 elementów określonego rodzaju. Prawdopodobieństwo uszkodzenia w ciągu roku każdego z tych elementów wynosi p = 0,001 i nie zależy od stanu pozostałych elementów. Obliczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia w ciągu roku dokładnie 2 elementów.

$n=1000, \quad p=0{,}001.$

$$P(X=2)=\binom{1000}{2}0{,}001^2\cdot 0{,}999^{998}$$

Można posłużyć się wzorem przybliżonym (dla λ=np=1)

$$P(X=2)\approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-1}\frac{1^2}{2!}=\frac{1}{2e}\approx 0{,}18394$$



Rozkłady zmiennej losowej ciągłej

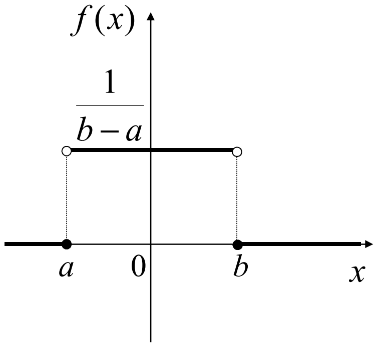
1. Rozkład jednostajny

Mówimy, że zmienna losowa X typu ciągłego ma *rozkład jednostajny* (*równomierny, prostokątny*), na przedziale (a,b), jeżeli jej gęstość wyraża się wzorem:

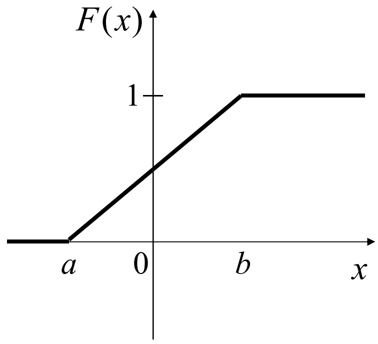
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad a < x < b \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Dystrybuantą tego rozkładu jest funkcja:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{dla} \quad a < x \le b \\ 1 & \text{dla} \quad x > b \end{cases}$$



1) Wykres gęstości



2) Wykres dystrybuanty

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej o rozkładzie jednostajnym wyrażają się wzorami:

$$EX = \frac{1}{2}(a+b)\ , \qquad D^2X = \frac{1}{12}(b-a)^2\ .$$

2. Rozkład wykładniczy

Mówimy, że zmienną losową X ma *rozkład wykładniczy* z parametrem $\lambda>0$, jeżeli jej gęstość wyraża się wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

Dystrybuantą tego rozkładu jest funkcja:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}\ .$$

Łatwo obliczyć, że

$$EX = \lambda\ , \qquad D^2X = \lambda^2\ .$$

3. Rozkład normalny

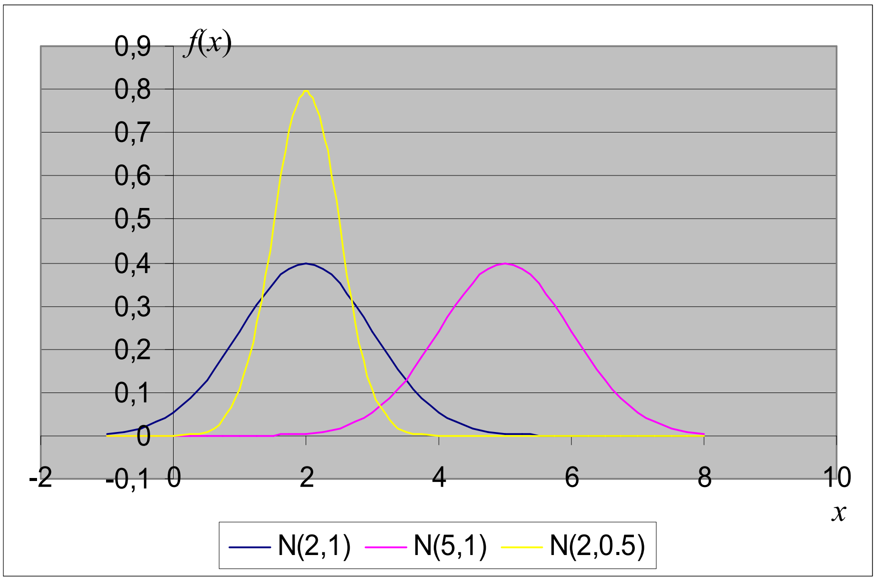
Mówimy, że zmienna losowa X ma *rozkład normalny* (*Gaussa*) z parametrami (μ,σ) (ozn. $N(\mu,\sigma)$) , jeżeli jej gęstość wyraża się wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{dla} \quad x \in R,\ \mu \in R,\ \sigma > 0 .$$

Parametry μ, σ nazywamy odpowiednio parametrami przesunięcia i skali.

Można pokazać, że $EX = \mu$, $D^2X = \sigma^2$.

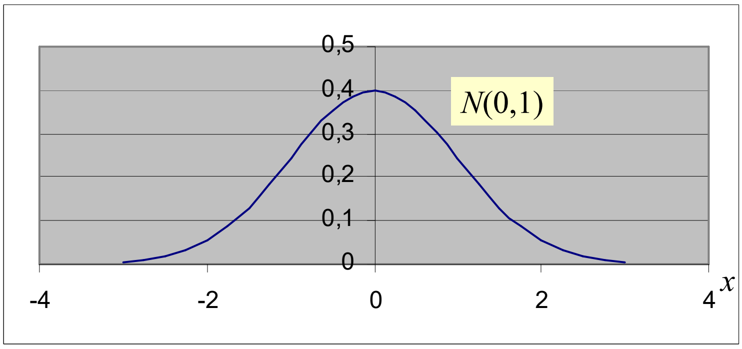
Wykres gęstości rozkładu normalnego nazywamy *krzywą normalną* lub *krzywą Gaussa*.



Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(\mu,\sigma)$, to zmienna losowa

$$U = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

ma rozkład normalny $N(0,1)$, zwany *standaryzowanym rozkładem normalnym*.



Wartości gęstości oraz dystrybuanty rozkładu $N(0,1)$ (ozn.$\varphi(x)$ – gęstość, $\Phi(x)$ – dystrybuanta) można odczytać z tablic.

Dystrybuanta Φ rozkładu $N(0,1)$ ma następującą własność

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Uwaga. Standaryzowanie zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym $N(\mu,\sigma)$ umożliwia obliczanie prawdopodobieństw dotyczących tej zmiennej za pomocą dystrybuanty Φ rozkładu $N(0,1)$.

Przykład. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(3,2)$. Wyznaczyć: $P(X<2)$, $P(1<X<3)$, $P(|X|\geq 1)$.

4. Rozkład chi-kwadrat

Mówimy, że zmienna losowa X ma *rozkład chi-kwadrat* (symbol χ^2) z k stopniami swobody, jeżeli jej gęstość wyraża się wzorem:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x\le 0 \\ C_k\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k}{2}-1} & \text{dla} \quad x>0 \end{cases},$$

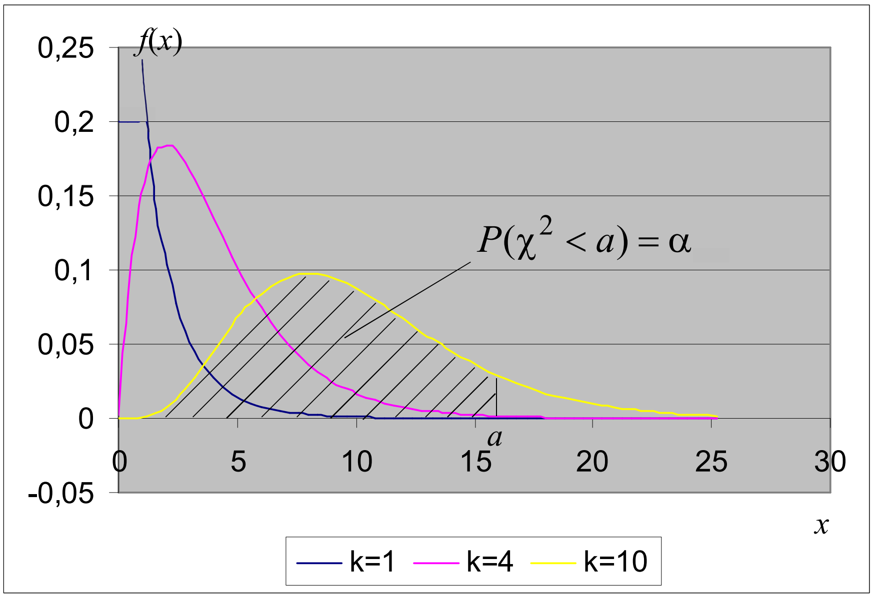
gdzie C_k jest stałą, zależną od liczby stopni swobody i tak dobraną, aby spełniony był warunek unormowania $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

Można pokazać, że $EX=k$, $D^2X=2k$.

Uwaga 1. Gdy liczba stopni swobody wzrasta, to rozkład chi-kwadrat powoli zbliża się do rozkładu normalnego.

Uwaga 2. Rozkład chi-kwadrat jest stablicowany. Z tablicy można odczytać liczbę a spełniającą (dla określonej liczby stopni swobody) warunek:

$$P(\chi^2<a)=\alpha\ .$$



5. Rozkład T-Studenta

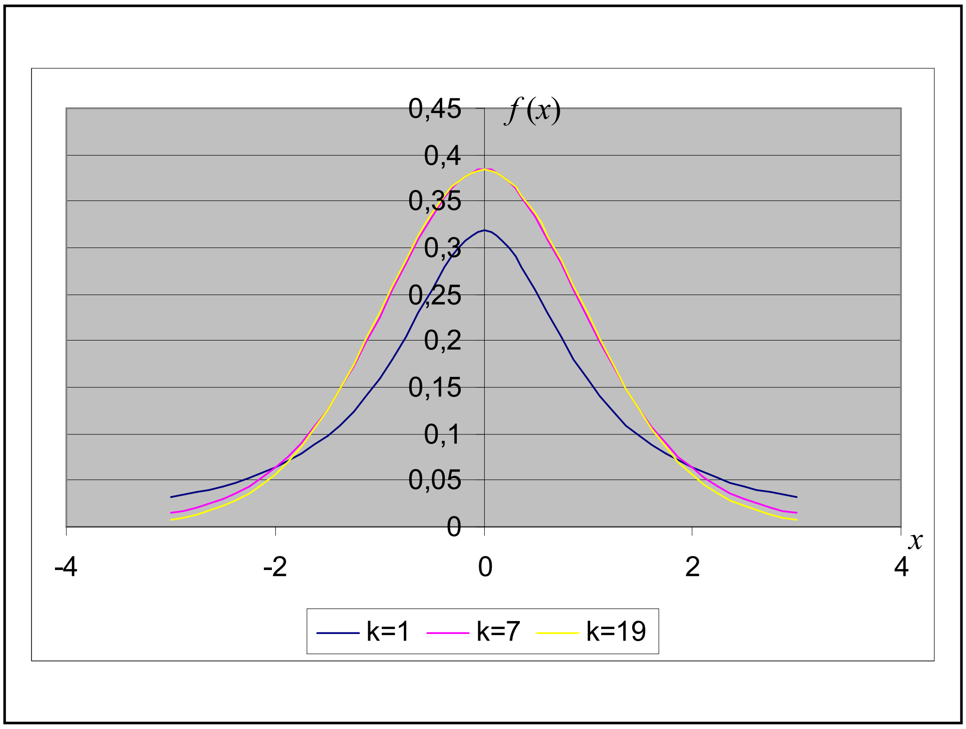
Mówimy, że zmienna losowa T ma rozkład *T-Studenta* z k stopniami swobody, jeżeli jej gęstość wyraża się wzorem:

$$f(x) = C_k \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \quad , \ x \in R \, .$$

gdzie C_k jest stałą, zależną od liczby stopni swobody i tak dobraną, aby spełniony był warunek unormowania.

Można pokazać, że $ET = 0$, $D^2T = \frac{k}{k-2}$.

Uwaga. Gdy liczba stopni swobody wzrasta, to rozkład T-Studenta szybko dąży do standaryzowanego rozkładu normalnego.


0,45
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
f (x)
x
-4
-2
0
2
4
k=1
k=7
k=19