

Równania różniczkowe 1-go rzędu

1. Rozwiązać równania różniczkowe (przy podanych warunkach początkowych znaleźć całkę szczególną):

a) $y' - ctgx = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, b) $xy' - y = 0$, c) $2\sqrt{x} \frac{dy}{dx} = y$, $y(4) = 1$,

d) $xyy' = 2x^2$, e) $\frac{dy}{dx}(x^2 - 4) = 2xy$, f) $\frac{dy}{dx}xy - 1 - y^2 = 0$, $y(2) = 1$,

g) $\frac{dr}{d\varphi} ctg\varphi - r = 2$, h) $y' - y = 0$, $y(1) = 1$, i) $y' \cos^2 x = y$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

2. Rozwiązać następujące równania różniczkowe przez sprowadzenie ich do równania o zmiennych rozdzielonych:

a) $\frac{dy}{dx} = 2x + y + 1$ b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$, c) $x \frac{dy}{dx} - y = xtg \frac{y}{x}$, d) $x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x}$.

3. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe:

a) $y' + y = 2x$, b) $y' - 3y = x^2 - x - 1$, c) $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{7x}$, d) $\frac{dy}{dx} - 4y = 2e^{4x}$,

e) $y' + 2y = 3 \sin x + \cos x$, f) $y' + 6y = -20 \sin 2x$, g) $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$;

h) $y' + \frac{y}{x} = x^2$, i) $x \frac{dy}{dx} + y = x \sin x$, j) $y' - ytgx = \sin^2 x$, k) $y' - \frac{y}{1-x^2} = x + 1$, $y(0) = 0$.

Tabela metody przewidywań dla równania postaci: $y' + py = f(x)$

| Postać $f(x)$ | Postać przewidywanej całki szczególnej równania niejednorodnego |
|--|---|
| $P_n(x)$ - wielomian | $W_n(x)$ - wielomian |
| $A \cdot e^{kx}$, $k \in R$, $A = const$ | ae^{kx} , gdy $k \neq -p$ axe^{kx} , gdy $k = -p$ |
| $A \cos kx + B \sin kx$ | $a \cos kx + b \sin kx$ |
| Suma lub iloczyn powyższych funkcji | Suma lub iloczyn powyższych funkcji |

Równania różniczkowe 2-go rzędu

1. Rozwiązać równania różniczkowe:

a) $y'' = 12x^2 - 6x$, $y(1) = 0$, $y(-1) = 6$, b) $y'' = \sin 5x$, c) $y'' = 4 \cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

d) $x^2 y'' + xy' = 1$, e) $xy'' \ln x - y' = 0$, f) $(1+x)y'' = y'$;

g) $y y'' - y'(1+y) = 0$, h) $yy'' + (y')^2 = 0$, i)* $yy'' + (y')^2 = (y')^3$.

2. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe jednorodne:

a) $y'' + y' - 2y = 0$, b) $y'' + 6y' + 9y = 0$, c) $y'' + 2y' + 10y = 0$,

d) $y'' + 16y = 0$, e) $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$,

f) $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$, g) $y'' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y(3) = 0$.

3. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

a) $y'' + y' + y = x^2$, b) $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$, c) $y'' - 2y' + y = 8e^x$,

d) $y'' + y' = 3x^2 + 4x$, e) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$, f) $y'' - y = 4xe^{-x}$,

g) $2y'' - y' - y = -9 \cos 2x + 2 \sin 2x$,

Tabela metody przewidywań dla równania postaci: $y'' + py' + qy = f(x)$ (i wyższych rzędów)

| Postać $f(x)$ | Równanie charakterystyczne | Postać przewidywanej całki szczególnej równ. niejednorod. |
|---|--|---|
| $P_n(x)$ | Liczba 0 nie jest pierwiast. równania charakterystycz. | $M_n(x)$ |
| | Liczba 0 jest m-krotnym pierwiast. równania charakterystycz. | $x^m M_n(x)$ |
| $P_n(x)e^{kx}$ | Liczba k nie jest pierwiast. równania charakterystycz. | $M_n(x)e^{kx}$ |
| | Liczba k jest m-krotnym pierwiast. równania charakterystycz. | $x^m M_n(x)e^{kx}$ |
| $P_n(x) \cos bx + Q_n(x) \sin bx$ | Liczba $\pm bi$ nie jest pierwiast. równania charakterystycz. | $M_n(x) \cos bx + N_n(x) \sin bx$ |
| | Liczba $\pm bi$ jest m-krotnym pierwiast. równ. charakterystycz. | $x^m M_n(x) \cos bx + x^m N_n(x) \sin bx$ |
| $P_n(x)e^{ax} \cos bx + Q_n(x)e^{ax} \sin bx$ | Liczba $a \pm bi$ nie jest pierwiast. równania charakterystycz. | $M_n(x)e^{ax} \cos bx + N_n(x)e^{ax} \sin bx$ |
| | Liczba $a \pm bi$ jest m-krotnym pierwiast. równ. charakterystycz. | $x^m M_n(x)e^{ax} \cos bx + x^m N_n(x)e^{ax} \sin bx$ |