

Sem. 1

Zestaw 5

1. Obliczyć granicę funkcji:

a) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{3x}$, c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$,

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$, g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$, h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1+x}}{x}$, i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}$, j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{8x}$,

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 2x}{3x^4}$, l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1}$, m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{1 - x^2}$, n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{x}} - \frac{x-2}{x+3}$, o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^x$

2. Obliczyć granice niewłaściwe

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{10x}{(x-2)^4}$, b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2}{(x+1)^2}$, c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{(x+2)^2}$, d) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-10}{(x-5)^4}$, e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^3}$.

3. Obliczyć granice jednostronne funkcji w punkcie

a) $y = \frac{1}{x-1}$, $x = 1$; b) $y = \frac{x-2}{x^2-4}$, $x = 2$; c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x = 0$; d) $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$, $x = 3$.

4. Wyznaczyć punkty nieciągłości funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|}{2x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 2 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

5. Obliczyć z definicji pochodną funkcji:

a) $y = x^2 - 3x$, b) $y = x^4$, c) $y = \frac{1}{x}$, d) $y = \frac{1}{x^2}$, e) $y = \sqrt{x}$

6. Obliczyć pochodną funkcji:

a) $y = -5x^6 - 4x^3 + 2x - 9$, b) $y = 3x^7 + 2x^5 + e^2$, c) $y = 3 \sin x + 5 \cos x - 3$,

d) $y = (x^2 - 2) \sin x$, e) $y = x^2 e^x$, f) $y = \operatorname{tg} x$, g) $y = \frac{\sin x}{x}$, h) $y = \frac{x^2 - 1}{2x^3 + 3}$,

i) $y = \frac{\cos x}{1+x^2}$, j) $y = \frac{1}{x^3} e^x$, k) $y = \cos 3x$, l) $y = \sin 2x \operatorname{tg} x$, m) $y = (2x-3)3^{2x}$