Sem. 3

Zestaw 4

1. Obliczyć całki krzywoliniowe nieskierowane określone parametrycznie:

a) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dL$, $\quad L: \quad x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi;$

b) $\int\limits_L (x^2+y^2+xy)dL$, $\quad L: \quad x = 2t, \quad y = t-1, \quad 0 \le t \le 2\pi;$

c) $\int\limits_L (x^2+y)dL$, $\quad L: \quad x = t^2, \quad y = t^2+5, \quad 0 \le t \le 2.$

2. Obliczyć całki:

a) $\int\limits_L (x+y)dL$, gdzie L jest obwodem trójkąta o wierzchołkach $A(0,0),\ B(1,0),\ C(0,1)$;

b) $\int\limits_L x^2 y\,dL$, gdzie L jest częścią okręgu leżącą w pierwszej ćwiartce układu wsp.;

c) $\int\limits_L (x^3-y^3)dL$, gdzie L jest obwodem prostokąta: $x=1,\ x=2,\ y=2,\ y=3.$

3. Wyznaczyć masę linii $L: \quad x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$, jeżeli gęstość liniowa wyraża się funkcją $\rho(x,y) = |y|$.

4. Obliczyć długość łuku $L: \quad x = 3t, \quad y = 3t^2$ od punktu $O(0,0)$ do punktu $A(3,3)$.

5. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane:

a) $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, gdzie L jest górną połową elipsy $L: \quad x = a\cos t, \quad y = b\sin t$, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

b) $\int\limits_{AB} (x^2-2xy)dx + (2xy+y^2)dy$, gdzie AB jest łukiem paraboli $y = x^2$ od punktu $A(1,1)$ do punktu $B(2,4)$.

c) $\int\limits_{AB} x^2dx + y^2dy$, gdzie AB jest łukiem krzywej $y = e^x$ od punktu $A(0,1)$ do punktu $B(1,e)$.

6. Stosując wzór Greena obliczyć całki:

a) $\oint\limits_K xy^2dy - x^2y\,dx$, gdzie K jest okręg $x^2+y^2 = a^2$;

b) $\oint\limits_K (x+y)dx - (x-y)dy$, gdzie K jest elipsą $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

7. Udowodnić, że funkcje podcałkowe stanowią różniczkę zupełną, a następnie obliczyć całki:

a) $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy + y\,dx$; b) $\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx + y\,dy$; c) $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy$; d) $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$.