

Sem. 3

Zestaw 3

1. Obliczyć całki

- a) $\iiint_P \frac{1}{5}(4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y + 1) dx dy dz$ w $P: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$;
- b) $\iiint_P xy dx dy dz$ w $P: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$;
- c) $\iiint_P r^2 dr dt dz$ w $P: 0 \leq r \leq a, 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq z \leq b$;
- d) $\iiint_P y^2 \cos x dx dy dz$ w $P: 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq b, -a \leq z \leq a$;
- e) $\iiint_P e^{x+y+z} dx dy dz$ w $P: 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2$.

2. Obliczyć całkę potrójną funkcji $f(x, y, z)$ w obszarze ograniczonym danymi powierzchniami

- a) $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^{10}$, $\Omega: x = 0, x = 2, y = 1, y = 2, z = 0, z = 1$;
- b) $f(x, y, z) = x - 2y + 3z + 5$, $\Omega: x = 0, y = 0, z = 0, z = 3, x + y = 2$;
- c) $f(x, y, z) = \sin(x + y + z)$, $\Omega: x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$;
- d) $f(x, y, z) = xyz$, $\Omega: x = 0, y = 0, z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
- e) $f(x, y, z) = (1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}})^5$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$;
- f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4, x = 0, y = 0, z = 0$.

3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

- a) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
- b) $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
- c) $x = 0, y = 0, x + y = 1, z = x + y, z = xy$.
- d) $x^2 + z^2 = 9, x + y = 3, x + y = -3, x - y = 3, x - y = -3$.
- e) $x^2 + y^2 = 2z, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Znaleźć masę kuli $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, wiedząc, że jej gęstość w każdym punkcie (x, y, z)

wynosi $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

5. Znaleźć moment bezwładności obszaru ograniczonego płaszczyznami

$x + 2y + 3z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$ względem osi OZ , ($\rho(x, y, z) = 1$).