

## Sem. 1

### Zestaw 6

1. Obliczyć granicę funkcji:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}, \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{3x}, \text{ c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}, \text{ d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \text{ e) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3},$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}, \text{ g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}, \text{ h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1+x}}{x}, \text{ i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}, \text{ j) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{8x},$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 2x}{3x^4}, \text{ l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1}, \text{ m) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{1 - x^2}, \text{ n) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{x}} - \frac{x-2}{x+3}, \text{ o) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2}{x-3} \right)^x$$

2. Obliczyć granice niewłaściwe

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10x}{(x-2)^4}, \text{ b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2}{(x+1)^2}, \text{ c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{(x+2)^2}, \text{ d) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-10}{(x-5)^4}, \text{ e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^3}.$$

3. Obliczyć granice jednostronne funkcji w punkcie

$$\text{a) } y = \frac{1}{x-1}, \quad x = 1; \quad \text{b) } y = \frac{x-2}{x^2-4}, \quad x = 2; \quad \text{c) } y = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, \quad x = 0; \quad \text{d) } y = 2^{\frac{1}{x-3}}, \quad x = 3.$$

4. Udowodnić, że

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a},$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1, \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

5. Obliczyć

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+25} - 5}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3 \sin 2x}, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x} - 1}, \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x},$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}, \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(3x+1)}{x}, \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x-2)}{4(x-1)}, \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{2x}, \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{4x-8} - 1}{x-2}.$$

6. Wyznaczyć punkty nieciągłości funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|}{2x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 2 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$