

Sem. 1

Zestaw 1

1. Niech z oznacza kolejno liczby: $2+i$, $1-i$, $-5+3i$, $-5-3i$, $3-2i$, i .

Obliczyć a) $2z$, b) z^2 , c) $\frac{1}{z}$, d) \bar{z} , e) $z\bar{z}$.

2. Obliczyć:

a) $(2+5i)^2$, b) $2i(3-2i)(5+i)$, c) $\frac{5-i}{2+3i}$, d) $\frac{(1-i)^2-i}{(1+i)^2+i}$,

e) $\frac{(1+2i)(2-i)}{(1+3i)^2}$, f) $\left(\frac{1-i}{2+i}+(2-i)i\right)(3+2i)$, g) $\left(\frac{1-i}{1+i}+\frac{4}{i}\right):2i$.

3. Niech z oznacza kolejno liczby: i , $1-i$, $1+i$, $2+3i$, $-1+2i$, $-3-3i$.

Zaznaczyć na płaszczyźnie liczby: $z, \bar{z}, -\bar{z}$.

4. Obliczyć:

a) $\operatorname{Re} z^2$, b) $\operatorname{Im} z^2$, c) $\operatorname{Re}(z+\bar{z})$, d) $\operatorname{Im}(z+\bar{z})$, e) $\operatorname{Re}(z-\bar{z})$, f) $\operatorname{Im}(z-\bar{z})$,

g) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}$, h) $\operatorname{Im}\frac{1}{z}$, i) $\operatorname{Re}\frac{1}{\bar{z}}$, j) $\operatorname{Im}\frac{1}{\bar{z}}$, gdy $z=3+2i$.

5. Obliczyć $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$, jeżeli

a) $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$, b) $2z=\left(\frac{i^5+2}{i^{19}}+1\right)^2$, c) $z=\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^2-\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^2$.

6. Udowodnić równości:

a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; b) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ dla $z_2 \neq 0$;

c) $\overline{(\bar{z})} = z$, $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\overline{z_1-z_2} = \bar{z}_1-\bar{z}_2$;

d) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{z_1 : z_2} = \bar{z}_1 : \bar{z}_2$.

7. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby a) 1, b) i , c) $1+i\sqrt{3}$, d) $\sqrt{3}-i$,

e) $-2i$, f) $2+2i$.

8. Korzystając ze wzoru Moivre'a obliczyć:

a) $(1-i)^7$, b) $(1+i\sqrt{3})^3$, c) $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$, d) $(-1+i)^{19}$, e) $(2-2i)^8$.

9. Korzystając ze wzoru Moivre'a wyrazić: a) $\sin 2\alpha$, b) $\cos 2\alpha$, c) $\sin 3\alpha$, d) $\cos 3\alpha$ za pomocą $\sin \alpha$, $\cos \alpha$.

10. Obliczyć:

a) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$, b) $\sqrt{-7+i24}$, c) $\sqrt{-1}$, d) $\sqrt[3]{-i}$, e) $\sqrt[4]{1-i}$, f) $\sqrt[4]{1+i}$

11. Rozwiązać równania:

a) $z\bar{z}+z-\bar{z}=3+2i$, b) $i(z+\bar{z})+i(z-\bar{z})=2i-3$, c) $|z|-z=1+2i$,

d) $x^2+4=0$, e) $x^2+x+1=0$, f) $x^3-1=0$, g) $x^2+4x+29=0$, h) $x^3-4x=0$,

i) $z^2+2(1+i)z+2i=0$, j) $x^4-i=0$, k) $x^5+32=0$, l) $x^6+64=0$.